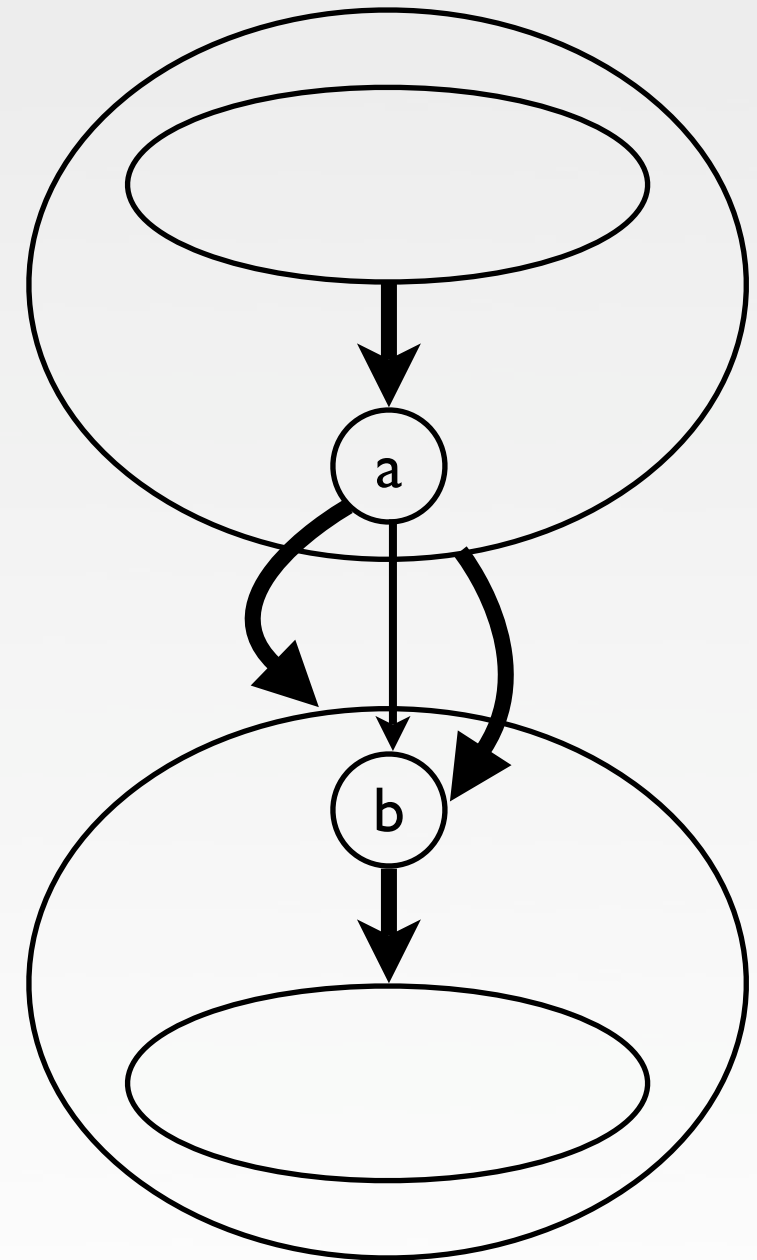


Überdeckungsrelation

- Def.: **a überdeckt b** ($a \text{ } \mathcal{C} \text{ } b$) wenn
 - ▶ b von a dominiert wird,
 - ▶ alle Alternativen, die von b dominiert werden, auch von a dominiert werden ($D(b) \subseteq D(a)$) und
 - ▶ alle Alternativen, die a dominieren, auch b dominieren ($\overline{D}(a) \subseteq \overline{D}(b)$).
- Unabhängig vorgeschlagen von Gillies (1959), Fishburn (1977), and Miller (1980)
- Die Überdeckungsrelation ist eine **transitive Teilrelation** der Dominanzrelation.



Unüberdeckte Menge

- Def.: Die **unüberdeckte Menge** (UC für “uncovered set”) besteht aus den Alternativen, die von keiner Alternative überdeckt werden.
 - ▶ Maximale Elemente bezüglich der Überdeckungsrelation
 - ▶ Die unüberdeckte Menge ist niemals leer
- Wenn ein Condorcet-Gewinner existiert, enthält ihn die unüberdeckte Menge als einziges Element.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $CO(>) \subseteq UC(>)$, $BA(>) \subseteq UC(>)$, $SL(>) \subseteq UC(>)$ und $UC(>) \subseteq GO(>)$.
 - ▶ Beweis: Tafel.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $UC(>) \cap SC(>) \neq \emptyset$.

Berechnung der unüberdeckten Menge

- ▶ Die unüberdeckte Menge kann in $O(m^3)$ Zeit berechnet werden.
 - Berechnung der Überdeckungsrelation in $O(m^3)$
 - Prüfe für jede Kante (Anzahl: $(m^2-m)/2$), ob sie eine Überdeckungskante ist
 - Bestimmung der maximalen Elemente
- ▶ In **Turniergraphen** kann die unüberdeckte Menge in $O(m^{2,38})$ Zeit berechnet werden.
 - Satz (Shepsle & Weingast, 1984): In Turniergraphen besteht die unüberdeckte Menge genau aus den Alternativen, die alle anderen Alternativen über einen Pfad der maximalen Länge 2 erreichen.
 - Beweis: Tafel.
 - Berechne $M=V^2+V+E$ (wobei V die Adjazenzmatrix des Turniergraphen, in der jede -1 durch 0 ersetzt wurde, und E die Einheitsmatrix ist)
 - UC besteht aus genau den Elementen, deren Zeilen in M keine Null enthalten.
 - Matrixmultiplikation mit Algorithmus von Coppersmith & Winograd (1990): $O(m^{2,38})$

Wünschenswerte Eigenschaften

- ▶ **Monotonie (M)**
 - Eine Alternative bleibt in der Lösungsmenge, wenn sie gestärkt wird.
 - ▶ **Supermengeneigenschaft (S)**
 - Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn Verlierer gestrichen werden.
 - ▶ **Idempotenz (I)**
 - Die Lösungsmenge ist invariant unter wiederholter Anwendung des Konzepts.
 - ▶ **Unabhängigkeit von Verlierern (U)**
 - Die Lösungsmenge ist invariant unter Änderungen von Kanten, die nicht in der Lösungsmenge liegen.
 - ▶ **γ^***
 - Die Lösungsmenge der Vereinigung einer Familie von Teilgraphen darf nicht alle Alternativen außer a enthalten wenn a in der Lösungsmenge jedes Teilgraphen liegt.
- In Turniergraphen gibt es genau ein minimales Lösungskonzept, das all diese (und weitere) Eigenschaften erfüllt: Die **minimale Überdeckungsmenge**.

Überdeckungen

(Bhaskar Dutta, 1988)



- Def.: B ist eine **Überdeckungsmenge** wenn $a \notin UC(B \cup \{a\})$ für alle $a \in A \setminus B$.
- Es ist möglich, dass $a \not\subset b$ in A nicht überdeckt, aber $a \subset b$ in $B \subseteq A$ schon überdeckt (**$a \subset b$ in B**).
 - ▶ Wenn $a \subset b$ in B , dann gilt $a \subset b$ auch in allen Teilmengen von B .
- Satz (Dutta, 1988; Dutta & Laslier, 1999; Peris & Subiza, 1999):
Es gibt genau eine **minimale Überdeckungsmenge** (MC für “minimal covering set”).
 - ▶ Beweis: Nächste Folie.

Eindeutigkeit von MC

- Lemma: Sei $k \geq 2$, B_1 und B_2 zwei Überdeckungsmengen und a_i für $1 \leq i \leq k$ Alternativen, so dass
 - für ungerade i , $a_i \in B_1$ und, falls $i > 1$, $a_i \subset a_{i-1}$ in $B_1 \cup \{a_{i-1}\}$ und
 - für gerade i , $a_i \in B_2$ und $a_i \subset a_{i-1}$ in $B_2 \cup \{a_{i-1}\}$.

Dann gilt für alle $i > j$, a_i dominiert a_j .

- ▶ Beweis: Induktion über k (Tafel).
- Satz: Der Schnitt zweier Überdeckungsmengen ist niemals leer.
- Satz: Der Schnitt zweier Überdeckungsmengen ist eine Überdeckungsmenge.
 - ▶ Die minimale Überdeckungsmenge ist die Schnittmenge aller Überdeckungsmengen.

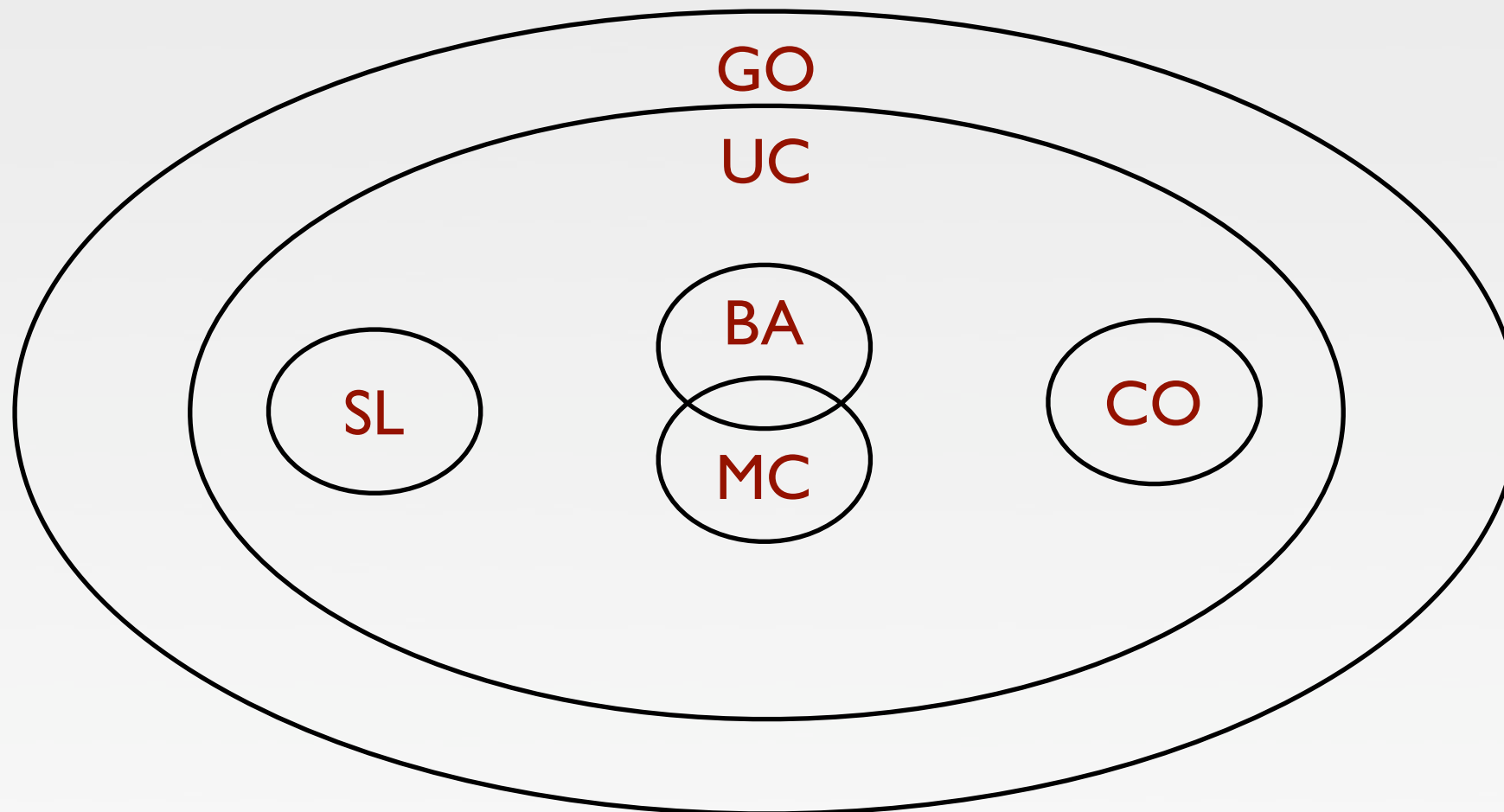
Überdeckungen (2)

- Ein äquivalentes spieltheoretisches Lösungskonzept wurde vom Spieltheoretiker **Lloyd Shapley** bereits 1953 benutzt.
- $UC(MC(>)) = MC(>)$
 - ▶ **Interne Stabilität** (vgl. von Neumann-Morgenstern stabile Mengen)
 - ▶ Beweis: Tafel.
- In allen Dominanzgraphen gilt $MC(>) \subseteq UC(>)$.
 - ▶ Beweis: $UC(>)$ ist eine Überdeckungsmenge.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $MC(>) \cap BA(>) \neq \emptyset$,
 $MC(>) \cap SL(>) = \emptyset$ und $MC(>) \cap CO(>) = \emptyset$.

Eigenschaften von MC

- **Monotonie (M)**
 - ▶ Eine Alternative bleibt in der Lösungsmenge, wenn sie gestärkt wird.
- **Supermengeneigenschaft (S)**
 - ▶ Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn Verlierer gestrichen werden.
- **Idempotenz (I)**
 - ▶ Die Lösungsmenge ist invariant unter wiederholter Anwendung des Konzepts.
- **Unabhängigkeit von Verlierern (U)**
 - ▶ Die Lösungsmenge ist invariant unter Änderungen von Kanten, die nicht in der Lösungsmenge liegen.

Zwischenergebnisse



Copeland (1951)	CO	$O(m^2)$
Slater (1961)	SL	$O(2^m)$
Good (1971)	GO	$O(m^2)$
Unüberdeckte Menge (1977)	UC	$O(m^3)$
Banks (1985)	BA	$O(2^m)$
Minimale Überdeckungsmenge (1988)	MC	?

Berechnung von MC

- Es war lange Zeit unklar, ob die minimale Überdeckungsmenge effizient berechnet werden kann.
- Nicht offensichtlich, warum das Berechnungsproblem überhaupt in **NP** liegen sollte
 - ▶ Selbst das Verifizieren einer minimalen Überdeckungsmenge ist nicht-trivial
 - Überdeckungseigenschaft ist einfach nachzuprüfen; das **Problem ist die Minimalität**
- Das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener Knoten in MC liegt, ist in **coNP**.
 - ▶ MC liegt in allen Überdeckungsmengen
 - ▶ $a \notin MC \Leftrightarrow$ Es gibt eine Überdeckungsmenge B mit $a \notin B$

Wdh.: Good Algorithmus

- Nehmen wir an, uns sei eine **Teilmenge S** der Good Menge bekannt. Dann müssen alle Alternativen, die nicht von allen Elementen aus S dominiert werden, auch zur Good Menge gehören.
 - ▶ Auf diese Weise erhalten wir eine (größere) Teilmenge der Good Menge.
 - ▶ Jede Alternative muss nur einmal betrachtet werden, denn nachdem ich sie zu S hinzugefügt habe, dominiert sie alle Alternativen außerhalb von S.
 - ▶ Für eine einelementige Startmenge hat dieser Algorithmus Laufzeit $O(m^2)$.
 - ▶ Man kann diesen Algorithmus m mal mit jeder Alternative als Startelement laufen lassen und erhält m dominante Mengen. Die kleinste dieser Mengen ist die Good Menge. Der resultierende Algorithmus hat die Komplexität **$O(m^3)$** .

I. Idee

- Algorithmus analog zum Verfahren zur Berechnung der Good Menge
 - ▶ procedure MC(A)
 - for each i in A
 - $B_i = \{i\}$
 - repeat
 - $A' = \{ a \in A \setminus B_i \mid a \in UC(B_i \cup \{a\}) \}$
 - $B_i = B_i \cup A'$
 - until $A' = \emptyset$
 - end for
 - return minimal B_i
- Problem: Es werden Alternativen hinzugefügt, die später überdeckt werden können.
 - ▶ Wie kann man die unüberdeckten Alternativen erkennen, die problemlos hinzugefügt werden können?

Ein wichtiges Lemma

- Lösung: Die Alternativen, die in der minimalen Überdeckungsmenge der bisher unüberdeckten Alternativen liegen, können problemlos hinzugefügt werden!
- Lemma: $B \subseteq MC(A) \Rightarrow MC(A') \subseteq MC(A)$
wobei $A' = \{a \in A \setminus B \mid a \in UC(B \cup \{a\})\}$
 - ▶ Beweis: Tafel.
- Zu jeder Teilmenge des MC, lässt sich mit Hilfe obigen Lemmas eine neue Teilmenge des MC finden.
 - ▶ Diese neue Menge ist nur dann leer wenn die ursprüngliche Menge der MC war.

2. Idee

- $B \subseteq MC(A) \Rightarrow MC(A') \subseteq MC(A)$ wobei $A' = \{a \in A \setminus B \mid a \in UC(B \cup \{a\})\}$

- ▶ $B \neq \emptyset \Rightarrow A' \subset A$

- Rekursiver Algorithmus

- ▶ procedure $MC(A)$
 for each i in A
 $B_i = \{i\}$
 repeat
 $A' = \{ a \in A \setminus B_i \mid a \in UC(B_i \cup \{a\}) \}$
 $B_i = B_i \cup MC(A')$
 until $A' = \emptyset$
 end for
 return minimal B_i

- Problem: Exponentielle Laufzeit

- ▶ Transitiver Dominanzgraph

Wdh.: Good Algorithmus (2)

- Mit Hilfe des folgenden Satzes können wir die Komplexität des Good Algorithmus von $O(m^3)$ zu $O(m^2)$ verbessern.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $CO(>) \subseteq GO(>)$.

Die essentielle Menge

- **Nullsummenspiele und Nash Gleichgewichte**
 - ▶ Die Adjazenzmatrix eines Dominanzgraphen kann als Spielmatrix eines Nullsummenspiels betrachtet werden.
 - ▶ Ein Nash Gleichgewicht ist ein randomisiertes Strategieprofil aus dem keiner der Spieler abweichen möchte.
- Def.: Die **essentielle Menge (ES)** besteht aus den Alternativen die in einem Nash Gleichgewicht des Adjazenzspiels mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt werden.
 - ▶ (Laffond, Laslier, & Le Breton, 1993; Dutta & Laslier, 1999)
 - ▶ In Turniergraphen hat das Adjazenzspiel **genau ein** Nash Gleichgewicht.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt **$ES(>) \subseteq MC(>)$** .

Berechnung der essentiellen Menge

- Satz: Die essentielle Menge kann in **polynomieller Zeit** berechnet werden.
 - ▶ Beweis:
 - Konstruktion eines **linearen Optimierungsproblems (LP)**, dessen Lösung die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines sog. quasistrikten Nash Gleichgewichts ist.
 - Lineare Optimierungsprobleme können in polynomieller Zeit gelöst werden [Khachiyan, 1979]

Algorithm 1 Essential set

procedure $ES(A, >)$

$(m_{ij})_{i,j \in A} \leftarrow M_{A, >}$

maximize ϵ

subject to $\sum_{j \in A} s_j \cdot m_{ij} \leq 0 \quad \forall i \in A$
 $\sum_{j \in A} s_j = 1$
 $s_j \geq 0 \quad \forall j \in A$
 $\sum_{j \in A} s_j \cdot m_{ij} - s_i + \epsilon \leq 0 \quad \forall i \in A$

$B \leftarrow \{a \in A \mid s_a > 0\}$

return B

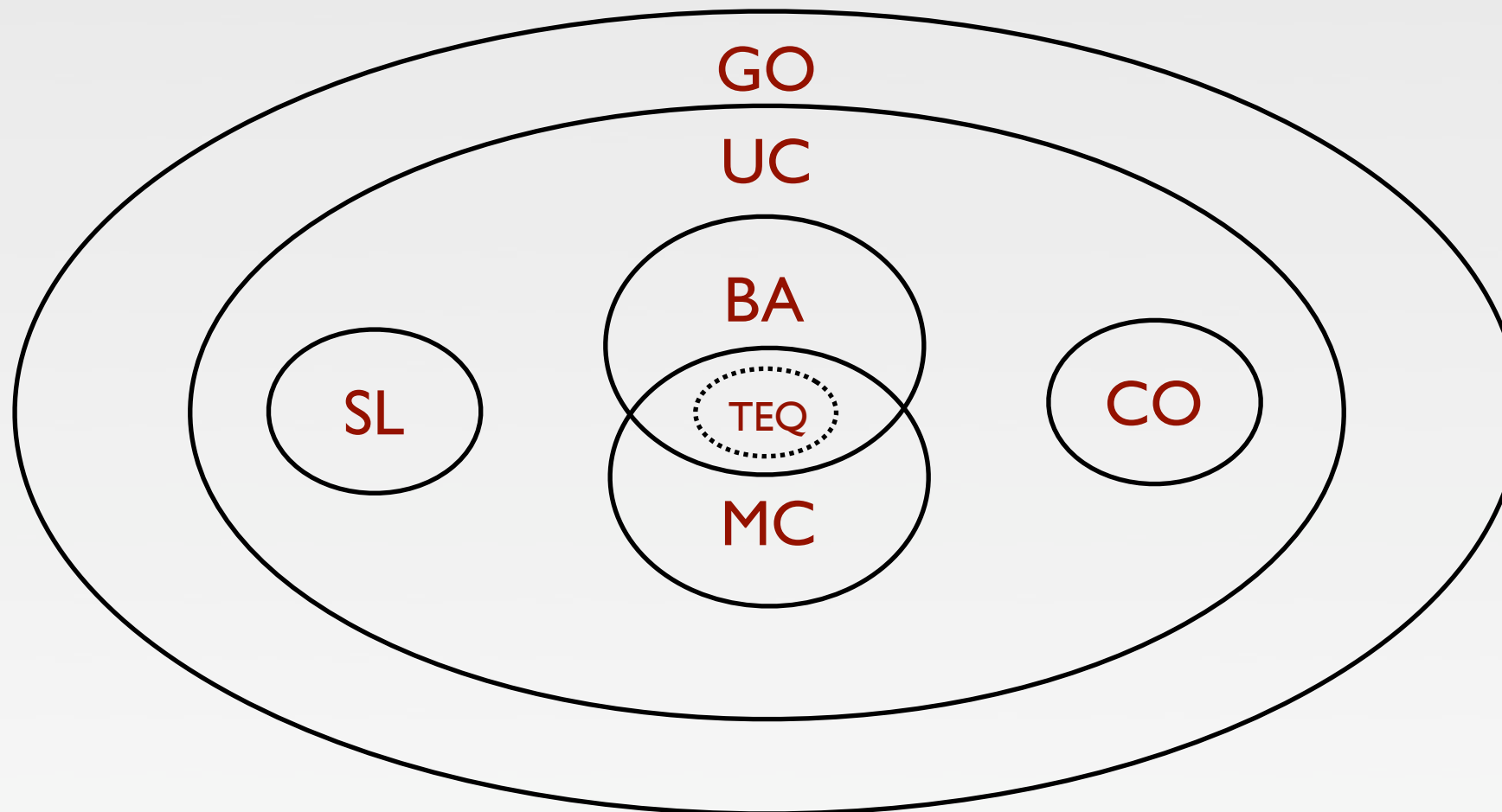
3. Idee

- $B \subseteq MC(A) \Rightarrow MC(A') \subseteq MC(A)$ wobei $A' = \{a \in A \setminus B \mid a \in UC(B \cup \{a\})\}$
- $B = ES(A) \subseteq MC(A) \Rightarrow ES(A') \subseteq MC(A') \subseteq MC(A)$
- Die essentielle Menge der unüberdeckten Alternativen liefert neue Alternativen, die hinzugefügt werden können.

```
► procedure MC(A)
  B = ES(A)
  repeat
    A' = { a ∈ A \ B | a ∈ UC(B ∪ {a}) }
    B = B ∪ ES(A')
  until A' = ∅
  return B
```

- Dieser Algorithmus hat **polynomielle Laufzeit**.
 - Höchstens m Aufrufe des ES-Algorithmus

Ergebnisse



Copeland (1951)	CO	$O(m^2)$
Slater (1961)	SL	$O(2^m)$
Good (1971)	GO	$O(m^2)$
Unüberdeckte Menge (1977)	UC	$O(m^3)$
Banks (1985)	BA	$O(2^m)$
Minimale Überdeckungsmenge (1988)	MC	$O(m^5)$
Turniergleichgewichtsmenge (1990)	TEQ	$O(2^m)$



- Ein Heißluftballon mit vier Passagieren an Bord ist zu schwer.
 - ▶ Einer der Passagiere muss aussteigen.
 - ▶ Jeder Passagier kann, basierend auf seinen körperlichen Fähigkeiten, bestimmte andere Passagiere aus dem Ballon werfen. Von den restlichen Passagieren kann er selbst aus dem Ballon geworden werden.

1. Strategie: Jeder versucht einen beliebigen ihm unterlegenen Passagier aus dem Ballon zu werfen.

- ▶ Es kommt zu einer **Rangelerei** und der Ballon zerschellt.
- ▶ Möglicherweise selbst wenn ein Passagier allen anderen unterlegen ist

2. Strategie

- ▶ B ist für A **von Nutzen**, wenn B einen Passagier bedroht, der A aus dem Ballon werfen kann.
- ▶ Es werden prinzipiell nur noch nutzlose Passagiere aus dem Ballon geworfen.
- ➔ **Es gibt immer einen Passagier, der niemanden mehr bedrohen kann, und einen weiteren Passagier der obigen entfernt.**